第19卷 第4期 曲阜师范大学学报 Vol.19 No.4
1993年10月 Journal of Qufu Normal University Oct. 1993

求一般凸规划鞍点的投影外梯度法

孙德锋

摘要 结合korplevich的外梯度概念和不精确搜索的思想，提出了一种实用的求一般凸规划问题鞍点的投影外梯度法，在目标函数和约束函数连续可微的条件下证明了算法具有全局收敛的性质，同时，还得到了一个鞍点存在的充分必要条件。

关键词 凸规划；变分不等式；鞍点；外梯度；投影；不精确搜索

分类号 O221

1 引 言

考虑一般凸规划问题

(CP) $\min\{f(x)\mid x\in X,\ g_i(x)\leq 0,\ 1\leq i\leq m\}$,

其中，$x\in R^n$，$X\subset R^n$是一非空闭凸集，f: $R^n\to R$和g_i: $R^n\Rightarrow R$，$1\leq i\leq m$都是连续可微的凸函数。

为了方便，记

$G(x)=(g_1(x),\ \cdots,\ g_m(x))^T$，$D=\{U=(x,\ y)\mid x\in x,\ y\in R_+^m\}$ 。

定义问题（CP）在D上的Lagrange函数为

$L(x,\ y)=f(x)+y\ G(x)$.

若有$(\overline{x},\ \overline{y})\in D$使得对所有$(x,\ y)\in D$都有

$L(\overline{x},\ y)\leq L(\overline{x},\ \overline{y})\leq L(x,\overline{y})$,

则称$(\overline{x},\ \overline{y})\in D$为$L(x,\ y)$在$D$上的鞍点，所有鞍点组成的集合记为$D^*$。由凸规划的kuhn-Tucker理论[2]，若$(x^*,y^*)$是$L(x,y)$在$D$上的鞍点，则$x^*$是问题(CP)的一个最优解。若鞍点集合$D^*$不是空集(可能为空集)，则求解问题(CP)就等价于求$L(x,y)$在D上的一个鞍点。所谓凸规划问题(CP)的鞍点指的是它所对应的Lagrange函数$L(x,\ y)$在D上的鞍点。

定义 $T(x,\ y)=(\partial xL(x,\ y),\ -\partial yL(x,\ y))$，其中$\partial xL(x,\ y)$，$\partial yL(x,\ y)$分别表示$L(x,\ y)$对$x$，$y$的偏导数。容易看出在$f(x)$和$g_i(x)$，$1\leq i\leq m$连续可微的条件下，$T(u)$在$D$上连续。由kuhn-Tucker定理[2]，若$T(u)$连续，则$u^*=(x^*,\ y^*)\in D$是$L(x,\ y)$在$D$上的鞍点$\Leftarrow\Rightarrow(T(u^*),\ u-u^*)\geq 0$，$\forall u\in D$，(VIP)其中$u=(x,\ y)$。这样求$L(x,\ y)$在$D$上的鞍点就转化为求变分不等式问题(VIP)的解。由于$f(x)$，$g_i(x)$，$1\leq i\leq m$都是连续可微的凸函数，则有

$$(T(u_2)-T(u_1),\ u_2-u_1)\geq 0,\ \forall u_1,\ u_2\in D, \tag{1.1}$$

作者单位：南京大学数学系，210000，江苏省南京市

收稿日期：1991 09 12

特别有

$$(T(u),\ u-u^*)\geq 0,\ \forall u\in D, \tag{1.2}$$

其中，u^*是$L(x,\ y)$在D上的鞍点。

最近，何炳生、何旭初[2]提出了一类求凸规划鞍点的形式上的算法，但到目前为止仅给出了求凸二次规划、线性规划鞍点的具体方法。前苏联数学家korplevich[1]利用外插技术，提出一种求鞍点的外梯度法(Extragradient Method)，当假设$T(u)$在D上lipschitz连续并且$D^*\neq\varnothing$时，korplevich证明了外梯度法的全局收敛性。但是lipschitz连续这个条件太强，在问题中一般难以满足；另外，即使$T(u)$在D上满足lipschitz连续性条件，求u^*也不是容易实现的，见Polak[4]对此类问题的评论。关于鞍点存在的假设，文〔1〕也没有给出可检验的充要条件。

本文的主要兴趣是利用外梯度的概念，去掉文〔1〕中$T(u)$必须在D上lipschitz连续这个条件，引进不精确技术，提出一种求鞍点的实用迭代法且在算法过程中给出鞍点存在的充要条件。

2　预备知识和几个引理

设$Q\subset \mathbf{R}^{n+m}$为任意一个非空闭凸集，$P_Q(z)$表示$z$在$Q$上的投影，即

$$P_Q(z)=\text{argmin}\ \{\|\nu-z\|,\ \forall \nu\in Q\}, \tag{2.1}$$

其中，$z\in\mathbf{R}^{n+m}$，$\|\cdot\|$表示$\mathbf{L}_2$-范数。当Q具有较简单的形式，如$Q=\mathbf{R}_+^{n+m}$，则$P_Q(z)$的实现是很容易的。因为Q为非空闭凸集，故$P_Q(z)$唯一确定。

定义变分不等式问题VIP$(T,\ Q)$如下：求$z^*\in Q$使得

$$(T(z^*),\ z-z^*)\geq 0,\ \forall z\in Q, \tag{2.2}$$

相应地记VIP$(T,\ Q)$的解集合Q^*为

$$Q^*=\{z^*|\text{所有满足(2.2)的}z^*\}. \tag{2.3}$$

引理2.1　设P_Q为Q上的投影算子，则

(i)　$\|P_Q(\nu)-z\|^2\leq\|\nu-z\|^2-\|P_Q(\nu)-\nu\|^2,\ \forall z\in Q,\ \nu\in\mathbf{R}^{m+n}$；

(ii)　$\|P_Q(u)-P_Q(\nu)\|\leq\|u-\nu\|,\ \forall u,\ \nu\in\mathbf{R}^{m+n}$。

引理2.1容易证明，见Zarantonello(1971)或Dunn(1981)。令

$$u_Q(\alpha)\overset{\triangle}{=}P_Q(u-\alpha T(u)), \tag{2.4}$$

在不引起混淆的情况下，我们用$u(\alpha)$来代替$u_Q(\alpha)$，Q的定义从上下文中可以看出。

下面的引理由Gafni和Bertsekas (1984) 首先得到，Galamai 和 Moré (1987) 给出了一种较简单的证法。

引理2.2[6,7]　设P_Q为Q上的投影算子，给定$u\in\mathbf{R}^{n+m}$和$d\in\mathbf{R}^{n+m}$，则如下定义的函数ψ：

$$\psi(\alpha)=\frac{\|P_Q(u+\alpha d)-u\|}{\alpha},\ \alpha>0 \tag{2.5}$$

是反序的，即若$0<\alpha_1\leq\alpha_2$，则$\psi(\alpha_1)\geq\psi(\alpha_2)$。

引理2.3[8]　设P_Q是Q上的投影算子，则$z^*\in Q$是问题VIP$(T,\ Q)$的一个解$\Longleftrightarrow$

$$z^* = P_Q(z^* - \alpha T(z^*)), \tag{2.6}$$

对某个或任何$\alpha > 0$。

引理2.4　设$T(u)$在Q上连续，P_Q是Q上的投影算子，给定常数$\eta \in (0, 1)$。如果$u \in Q \backslash Q^*$，则存在一个正常数δ使得

$$\eta \| u(\alpha) - u \|^2 \geq \alpha^2 \| T(u(\alpha)) - T(u) \|^2, \ \forall \alpha \in (0, \delta] . \tag{2.7}$$

证明　由引理2.3，若$u \notin Q^*$，则$\| u(1) - u \| > 0$。由引理2.2，得

$$\frac{\| u(\alpha) - u \|}{\alpha} \geq \| u(1) - u \| > 0, \ \forall \alpha \in (0, 1] . \tag{2.8}$$

因为$T(u)$在Q上连续并且由引理2.1之（ii）可知

$$\| u(\alpha) - u \| = \| P_Q(u - \alpha T(u)) - P_Q(u) \| \leq \alpha \| T(u) \|,$$

故　$u(\alpha) \to u$，当$\alpha \to 0$时，从而必有

$$\| T(u(\alpha)) - T(u) \| \to 0, \text{当} \alpha \to 0, \tag{2.9}$$

结合(2.8)和(2.9)可知必存在正常数δ使得

$$\eta \frac{\| u(\alpha) - u \|^2}{\alpha^2} \geq \| T(u(\alpha)) - T(u) \|^2, \ \forall \alpha \in (0, \delta],$$

把上式整理一下即得(2.7)式。

引理2.5 [10]　设Q为R^+中一个紧凸集且非空，P_Q表示Q上的投影算子，$T(u)$在Q上连续，则问题VIP(T, Q)的解集合$Q^* \neq \varnothing$。

3　算　法

给定正常数$s \in (0, +\infty)$，$\beta \in (0, 1)$和$\eta \in (0, 1)$，我们给出如下的算法PEGM (Projected Extragradient Method)：

1　任取$u^0 \in D$；

2　对$k = 0, 1, 2, \cdots$，当$u^k \notin D^*$，计算

（i）选取最小的非负整数m_k使得

$$\eta \| u(\alpha_k) - u^k \|^2 \geq \alpha_k^2 \| T(u^k(\alpha_k)) - T(u^k) \|^2, \tag{3.1}$$

其中，$\alpha_k = \beta^{m_k} s$，$u^k(\alpha_k)$如(2.4)式所定义，此时Q取成D；

（ii）
$$\bar{u}^k = P_D(u^k - \alpha_k T(u^k)), \tag{3.2}$$
$$u^{k+1} = P_D(u^k - \alpha_k T(\bar{u}^k)).$$

算法的说明：

1°在实际计算过程中以$\frac{\| u^k(s) - u^k \|^2}{s^2} \leq \varepsilon^2$作为停机准则，其中$\varepsilon$为预先给定的精度；

2°由引理2.4可知，算法中的步骤2之（i）是可以实现的，即当$u^k \notin D^*$时，m_k必有限；

3°若$T(u)$在D上lipschitz连续，lipschitz常数为L，则容易证明$\alpha_k \geq \min\{\frac{\beta\sqrt{\eta}}{L}, s\}$；

4°在每步的计算过程中可以用s_k代替s，只要$\{s_k\}$上有界并且下确界大于零，则算法的收敛性质将仍保持成立。

4　算法的收敛性质

定理4.1　设$T(u)$在D上连续且鞍点集合$D^*\neq\varnothing$，则对任何由(3.1)和(3.2)产生的点列$\{u^k\}$存在相应的$\bar{u}\in D^*$，使得$u^k\to\bar{u}$当$k\to+\infty$.

证明　任取一点$u^*\in D^*$. 由引理(2.1)中的（i）可知：

$$\begin{aligned}\|u^{k+1}-u^*\|^2&\leq\|u^k-\alpha_kT(\bar{u}^k)-u^*\|^2-\|u^k-\alpha_kT(\bar{u}^k)-u^{k+1}\|^2\\&=\|u^k-u^*\|^2-\|u^k-u^{k+1}\|^2+2\alpha_k(T(\bar{u}^k),u^*-u^{k+1})\\&=\|u^k-u^*\|^2-\|u^k-u^{k+1}\|^2+2\alpha_k(T(\bar{u}^k),\ u^*-\bar{u}^k)+2\alpha_k(T(\bar{u}^k),\bar{u}^k-u^{k+1})\\&\leq\|u^k-u^*\|^2-\|u^k-u^{k+1}\|^2+2\alpha_k(T(\bar{u}^k),\ \bar{u}^k-u^{k+1}),\end{aligned}\tag{4.1}$$

上式的最后一个不等式是利用（1.2）式得到的. 故

$$\begin{aligned}\|u^{k+1}-u^*\|^2\leq&\|u^k-u^*\|^2-\|u^k-\bar{u}^k\|^2-\|\bar{u}^k-u^{k+1}\|^2\\&-2(u^k-\bar{u}^k)^T(\bar{u}^k-u^{k+1})+2\alpha_kT(\bar{u}^k)^T(\bar{u}^k-u^{k+1})\\=&\|u^k-u^*\|^2-\|u^k-\bar{u}^k\|^2-\|\bar{u}^k-u^{k+1}\|^2\\&+2(u^k-\alpha_kT(\bar{u}^k)-\bar{u}^k)^T(u^{k+1}-\bar{u}^k).\end{aligned}\tag{4.2}$$

现在估计(4.2)式的最后一项. 由引理2.1之（i）可知

$$(u^k-\alpha_kT(u^k)-\bar{u}^k)^T(u^{k+1}-\bar{u}^k)\leq0.$$

事实上，在引理2.1中取$v=u^k-\alpha_kT(u^k)$，$z=u^{k+1}$，由于$\bar{u}^k=P_D(v)$，故代入引理2.1之(i)即易得上式. 故有

$$\begin{aligned}&2(u^k-\alpha_kT(\bar{u}^k)-\bar{u}^k)^T(u^{k+1}-\bar{u}^k)\\&=2(u^k-\alpha_kT(u^k)-\bar{u}^k)^T(u^{k+1}-\bar{u}^k)+2\alpha_k(T(u^k)-T(\bar{u}^k))^T(u^{k+1}-\bar{u}^k)\\&\leq2\alpha_k(T(u^k)-T(\bar{u}^k))^T(u^{k+1}-\bar{u}^k)\\&\leq\alpha_k^2\|T(u)^k-T(\bar{u}^k)\|^2+\|u^{k+1}-\bar{u}\|^2,\end{aligned}\tag{4.3}$$

(4.3)式的最后一个等式来源于Cauchy-Schwartz不等式. 由(3.1)，(4.2)和(4.3)得

$$\begin{aligned}\|u^{k+1}-u^*\|^2\leq&\|u^k-u^*\|^2-\|u^k-\bar{u}^k\|^2-\|\bar{u}^k-u^{k+1}\|^2\\&+\eta\|u^k-\bar{u}^k\|^2+\|u^{k+1}-\bar{u}^k\|^2=\|u^k-u^*\|^2-(1-\eta)\|u^k-\bar{u}^k\|^2,\end{aligned}\tag{4.4}$$

由（4.4）式可知$\{\|u^k-u^*\|\}$是一个单调下降序列并且容易推得

$$\|u^k-\bar{u}^k\|\to0\text{当}k\to+\infty。\tag{4.5}$$

又因为$\{u^k\}$必为有界序列，从而存在子列$\{u^{k_i}\}$和一点$\bar{u}\in D$使得

$$u^{k_i}\to\bar{u}\text{当}k_i\to+\infty。\tag{4.6}$$

由于$\{\alpha_{k_i}\}$是有界的，不失一般性（如果需要取子序列）假设存在α_0使得

$$\alpha_{k_i}\to\alpha_0\text{当}k_i\to+\infty。$$

下面我们将利用反证法来证明$\bar{u}\in D^*$. 假设$\bar{u}\notin D^*$，则由引理2.3可知存在一正常数δ_1，使得

$$\frac{\|P_D(\bar{u}-sT(\bar{u}))-\bar{u}\|^2}{s^2}\geq\delta_1。\tag{4.7}$$

由于$u^{k_i}\to\bar{u}$，则易知存在正整数k_1使得当$k_i\geq k_1$时，有

$$\frac{\|P_D(u^{k_i}-sT(u^{k_i}))-u^{k_i}\|^2}{s^2}\geq\frac{\delta_1}{2},\tag{4.8}$$

由引理2.2，

$$\frac{\|\overline{u}^{k_i}-u^{k_i}\|^2}{\alpha_{k_i}^2}\geq\frac{\|P_D(u^{k_i}-sT(u^{k_i}))-u^{k_i}\|^2}{s^2}.\tag{4.9}$$

另一方面，由$T(u)$的连续性，可知存在一正常数$\delta\in(0,s]$使得

$$\|T(\overline{u}(\alpha))-T(\overline{u})\|\leq\frac{\delta_1}{4}\eta,\ \forall\alpha\in[0,\delta].\tag{4.10}$$

由于$u^{k_i}\to\overline{u}$并且$T(u)$在D上连续，则易证存在正整数k_2使得当$k_i\geq k_2$时，有

$$\|T(u^{k_i}(\alpha))-T(u^{k_i})\|^2\leq\frac{\delta_1}{2}\eta,\ \forall\alpha\in(0,\delta].\tag{4.11}$$

事实上，若不然，则存在子序列$\{j_i\}\subset\{k_i\}$和相应的子列$\{\alpha_{j_i}\}$使得

$$\|T(u^{j_i}(\alpha_{j_i}))-T(u^{j_i})\|^2>\frac{\delta_1}{2}\eta,\tag{4.12}$$

其中，$\alpha_{j_i}\in(0,\delta]$．不失一般性（如果需要取子序列）假设存在$\overline{\alpha}\in[0,\delta]$使得

$$\alpha_{j_i}\to\overline{\alpha}\text{当}j_i\to+\infty.$$

在（4.12）式两边取极限可得　$\|T(\overline{u}(\overline{\alpha}))-T(\overline{u})\|^2\geq\frac{\delta_1}{2}\eta$，这与（4.10）式矛盾，从而（4.11）式成立．取$k=\max\{k_1,k_2\}$，则由（4.8），（4.9）和(4.11)式可知当$k_i\geq k$时，有

$$\frac{\|u^{k_i}(\alpha)-u^{k_i}\|^2}{\alpha^2}\geq\frac{1}{\eta}\|T(u^{k}(\alpha))-T(u^{k_i})\|^2,\ \forall\alpha\in(0,\delta],\tag{4.13}$$

从而可知当$k_i\geq k$时，$\alpha_{k_i}\geq\beta\delta$，这意味着$\alpha_0>0$．

由于$\|u^{k_i}-\overline{u}^{k_i}\|\to0$当$k_i\to+\infty$，则必有

$$\overline{u}^{k_i}\to\overline{u}\text{当}k_i\to+\infty.$$

在$\overline{u}^{k_i}=P_D(u^{k_i}-\alpha_{k_i}T(u^{k_i}))$两边取极限得

$$\overline{u}=P_D(\overline{u}-\alpha_0T(\overline{u})),\tag{4.14}$$

但是假设$\overline{u}\notin D^*$，这与引理2.3矛盾．故我们证明了$\overline{u}\in D^*$．

由于对$\overline{u}\in D^*$来说，$\{\|u^k-\overline{u}\|\}$是一单调下降序列，那么由此可知不但子序列$\{u^{k_i}\}$收敛到$\overline{u}$而且整个序列$\{u^k\}$亦收敛到$\overline{u}$．定理4.1证毕．

注4.1　当用一般的非空闭凸集代替D，则定理4.1的结论同样成立．

定理4.1在假设$D^*\neq\varnothing$的条件下证明了算法的全局收敛性，下面将指出在算法的实施过程中就可以得到鞍点存在的充要条件．

定理4.2　设$T(u)$在D上连续，P_D为D上的投影算子，则$D^*\neq\varnothing\Leftarrow\Rightarrow$某个或任何由(3.1)和（3.2）产生的点列$\{u^k\}$都是有界的．

证明　必要性．由定理4.1，若$D^*\neq\varnothing$，则任何由（3.1）和（3.2）产生的点列$\{u^k\}$

都是有界的。

充分性。假设存在一个由(3.1)和(3.2)产生的有界点列$\{u^k\}$，即存在常数$r_1\in(0, +\infty)$使得

$$\|u^k\|\leq r_1,\ \forall k.$$

从而由$\bar{u}^k$的定义和$T(u)$的连续性，则必存在常数$r_2\in(0, +\infty)$，$r_3\in(0, +\infty)$使得

$$\|\bar{u}^k\|\leq r_2,\ \forall k,\ s\|T(u^k)\|\leq r_3,\ s\|T(\bar{u}^k)\|\leq r_3.$$

取$r=\max\{r_1, r_2, r_3\}$。由引理2.1之(ii)容易验证下列关系式：

$$\begin{aligned}&\|P_D(u^k-\alpha T(u^k))\|\leq 2r,\\&\|P_D(u^k-\alpha T(\bar{u}^k))\|\leq 2r,\ \forall\alpha\in[0, s].\end{aligned}\tag{4.15}$$

任取D中的一点v，定义

$$Y=\{z\in\mathbf{R}^{n+m}\mid\|z\|_\infty\leq 2r+\|D\|_\infty\}\cap D,$$

其中，$\|\cdot\|_\infty$表示L_∞-范数。由Y的定义和(4.15)式可知

$$P_D(u^k-\alpha T(u^k))\in Y,\ P_D(u^k-\alpha T(\bar{u}^k))\in Y,\ \forall\alpha\in[0, s].\tag{4.16}$$

由投影的定义和关系式(4.16)，有

$$\begin{aligned}&P_Y(u^k-\alpha T(u^k))=P_D(u^k-\alpha T(u^k)),\\&P_Y(u^k-\alpha T(\bar{u}^k))=P_D(u^k-\alpha T(\bar{u}^k)),\ \forall\alpha\in[0, s].\end{aligned}\tag{4.17}$$

由算法的定义和(4.17)式，得

$$\begin{aligned}&\bar{u}^k=P_Y(u^k-\alpha T(u^k)),\\&u^{k+1}=P_Y(u^k-\alpha T(\bar{u}^k)).\end{aligned}\tag{4.18}$$

关系式(4.18)意味着序列$\{u^k\}$可看成对问题VIP(T, Y)利用上一节中的算法得到的。由于Y为非空的紧凸集，则由引理2.5知VIP(T, Y)的解集合$Y^*\neq\varnothing$。应用定理4.1和注4.1知必存在$z^*\in Y^*$使得

$$u^k\to z^*\text{当}k\to+\infty.$$

因为$v\in Y$，则有$(T(z^*), v-z^*)\geq 0$。由于z^*是$\{u^k\}$的极限点，故z^*唯一确定。因为v是D中任意取的点，则必有

$$(T(z^*), z-z^*)\geq 0,\ \forall z\in D.\tag{4.19}$$

上式说明z^*是VIP(T, D)的一个解，从而$D^*\neq\varnothing$。

推论4.1 设定理4.2的假设条件成立，如果由(3.1)和(3.2)产生的某个点列$\{u^k\}$是有界的，则必存在$u^*\in D^*$使得$u^k\to u^*$当$k\to+\infty$。

综合定理4.1和定理4.2，我们就可以得到原问题的鞍点（即对应的Lagrange函数$L(x, y)$在D上的鞍点）集合为空集的充要条件。

推论4.2 设$T(u)$在D上连续，则凸规划问题(CP)所对应的鞍点集合$D^*=\varnothing\Leftrightarrow$某个或任何由(3.1)和(3.2)所产生的点列$\{u^k\}$是无界的。

上面的结论说明：当鞍点集合非空，则我们的算法可以通过迭代逼近某个鞍点，相应地可得问题(CP)的一个近似解；当鞍点集合为空集，我们的算法就给出了一个判定准则，在具体实现过程中，可以预先给定一个较大的正数E，当迭代到某一步有$\|u^k\|\geq E$，则可停机。

参考文献

1 Korplevich G M. The Extragradient Method for Finding Saddle Points and Other Problems. MATEKON, Summer, 1977; 35—49

2 Fetcher R. Practical Method of Opimization。Constrained Optimization, John Wiley and Sons, 1981; 2

3 Harker Patrik T, Pang J ng-shi. Finite-Dimensional Variational Inequality and Nonlinear Complementarity Problems. A Survey of Theory, Algorithoms and Applications, Mathematical Programming, 1990; 48. 161—220

4 Polak E. An Historical Survey of Computational Methods in Optimal Control. SIAM Rev, 1973; 15. 553—584

5 Zarantonello E H. Projections on Convex Sets in Hilbert Space and Spectral Theory. in E. H. Zarantonello, ed., Contributions to Nonlinear Analysis (Academic Press, New York), 1971;

6 Cafni E M, Bertsekas D P. Two-metric Projection Methods for Constrained Optimization. SIAM J Control-and Optimization, 1984; 22. 936-964

7 Calamai Paul H, More Jorge J. Projected Gradient Methods for Linearly Constrained Problems. Mathematical Programming, 1987; 39. 93-116

8 Eaves B C. On the Basic Theorem of Complementarity. Mathematical Programming, 1971; 1. 68-75

9 Dunn J C. Global and Asymptotic Convergence Rate Estimates for A Class of Projected Gradient Processes. SIAM J Control and Optimization, 1981; 19. 368-400

10 Karamardian S. Generalized Complementarity Problems. J of Optimization Theory and Applications, 1971; 8. 161-167

11 Bertsekas Dimitri P. On the Goldstein-Levitin-Polyak Gradient Projection Method. IEEE Transactions on Automatic Control, 1976; AC-21

12 何炳生，何旭初．一类求解凸规划的鞍点法．计算数学，1991；1. 51-57

PROJECTED EXTRAGRADIENT METHOD FOR FINDING SADDLE POINTS OF GENERAL CONVEX PROGRAMMING

Sun Defeng

Abstract A kind of practical extragradient method for finding saddle points of general convex programming by combining Korplevich's extragradient concept and the method of inexact line searches is proposed. It is proved that the alogrithom has global convergence property when the goal function and the contraint functions are continuously differentiable. Moreover, a sufficient and necessary condition on the existence of saddle point is obtained.

Key words　convex programming; variational inequality problem; saddle points; extragradient; projection; inexact searches.

Author's address　Department of Mathematics, Nanjing University, 210000, Nanjing, Jiangshu, PRC

内含集列原理

纪　乐　刚

（昌潍师专）

集合论是现代数学的基础理论之一，用集合论的观点建立和描述数学分析的内容，这无疑是一件十分有意义的工作。

本文改变区间（域）套定理的条件，在一般离散点集上建立起"内含集列原理"。这一原理不仅是实数连续性命题的又一等价形式，更重要的是它可完全替代区间套、有限覆盖等定理的工具作用，在应用上给我们带来极大的方便。

内含集列原理（一维）　设$G_n\neq\phi(n=1,2,\cdots)$是数集，如果对$\forall n\in N$，有$G_{n+1}\subseteq G_n\subseteq[a,b]$，则$\exists c\in[a,b]$，使$G_m\cap U(c,\delta)$对$\forall\delta>0$及$\forall m\in N$不空。

证明　因G_n有下界a，从而有下确界，记为C_n。因$G_{n+1}\subseteq G_n\subseteq[a,b]$，故$\{C_n\}$非减且有上界$b$，从而收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty}C_n=c$。显然$a\leq c\leq b$。对$\forall\delta>0$及$m\in N$，取足够大的$n_1>m$，使$c-\delta<C_{n_1}\leq c$。由确界概念知：$\exists\alpha\in G_{n_1}\subseteq G_m$，满足$C_{n_1}\leq\alpha<C_{n_1}+\delta$，所以$\alpha\in G_m\cap U(c,\delta)$。证毕。

利用这个原理可以方便地证明许多重要命题，仅举几例。

定理1　若$f\in c[a,b]$，则f在$[a,b]$上有上界。

证明　否则，诸$G_n=\{x\in[a,b]:f(x)\geq n\}(n=1,2,\cdots)$皆不空且$G_{n+1}\subseteq G_n\subseteq[a,b]$，由原理知$\exists c\in[a,b]$，使$G_m\cap U(c,\delta)$对$\forall\delta>0$及$m>f(c)+1$不空，即对$\forall\delta>0$，$\exists\alpha\in U(c,\delta)$，使$f(\alpha)\geq m>f(c)+1$，这与$f$在$c$点连续相矛盾。

定理2　若$f\in c[a,b]$，则f在$[a,b]$上能达到其上确界M。

证明　由于诸$G_n=\{x\in[a,b]:f(x)>M-(1/n)\}(n=1,2,\cdots)$皆不空且$G_{n+1}\subseteq G_n\subseteq[a,b]$，故由原理知$\exists c\in[a,b]$，使$G_m\cap U(c,\delta)$对$\forall\delta>0$及$m\in N$不空。若$M>f(c)$，记$r=(m-f(c))/2$，并取$m>1/r$。于是对$\forall\delta>0$，$\exists\alpha\in U(c,\delta)$，使$f(\alpha)>M-(1/m)=M-r=f(c)+r$，这与$f$在$c$点连续相矛盾，故$f(c)=M$。

定理3　设S是$[a,b]$的一个开覆盖，试证：存在$\lambda>0$，使对一切$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，只要$0<\beta-\alpha<\lambda$，便有$I\in S$，使$[\alpha,\beta]\subset I$。

（下转22页）